Nafouz

<u>التمرين الأول</u>: (04 نقاط)

1) بين أن العدد 2017 أولي.

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $(E) \ldots\ldots 14119x - 10085y = 22187$

أ/ أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 22187 ، 10085 و 14119.

ب/ بين أن الثنائية $(3;2)$ حلا خاصا للمعادلة (E) ثم عين مجموعة حلولها.

ج/ عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x\,;y) = 11$.

3) أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $5^n + 7^{2017}$ قبلا للقسمة على 11.

4) ليكن a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلا منهما أصغر من 8 ، نعتبر $N = \overline{a01b}$ مكتوب في النظام العشري

أ/ تحقق أن : $10^3 \equiv (-1)[11]$.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي N حيث باقي قسمته على 11 هو 4.

ج/ أكتب هذا العدد في النظام ذي العد 11.

<u>التمرين الثاني</u>: (04 نقاط)

1) عين العددين الحقيقيين x و y بحيث $x^2\, e^{2iy}\ \ 4 = 0+$ و $x > 0$ ثم تحقق أن العدد المركب $-2i$ يحقق هذه المساواة.

2) نرفق بكل عدد مركب Z يختلف عن $-2i$ العدد المركب Z' حيث: $Z' = \frac{Z-2i}{Z+2i}$.

لتكن النقط A ، B ، M ، M' صور الأعداد $2i$ ، $-2i$ ، Z و Z' على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{u};\vec{v})$. نضع : $Z\ \ -2i = +\,r\,e^{i\theta}$ حيث $r \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in \mathbb{R}$.

أ/ بين أن : $Z' - 1 = \frac{4}{r}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

ب/ عين مجموعة النقط M التي من أجلها يكون Z' عددا حقيقيا.

ج/ بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و نصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تحديد عناصرها المميزة.

3) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة I ذات اللاحقة $\frac{3\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{-}{4}}$ و زاويته α .

أ/ عين القيس الرئيسي للعدد α إذا علمت أن صورة A بالدوران R هي النقطة ذات اللاحقة 1.

ب/ عين على الرسم النقط : $A\,;\,B\,;\,I$.

ج/ تحقق أن الدائرة (C') صورة دائرة مركزها A بالدوران R ثم أرسم شكلا في نفس المعلم السابق.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases}$$ من أجل $n \geq 2$ و $v_n = u_n - \ln n$ من أجل $n \geq 1$.

1). أ/ أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

ب/ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} + + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$

2).أ/ بين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} . dx \leq \frac{1}{k}$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n\ 1 \leq -\ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ و $0 \leq v_n \leq 1$.

3).أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} - dx \quad \frac{1}{n+1} = v_{n+1} - v_n$.

ب/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4).أ/ بين أن المتتالية (v_n) متقاربة ، نرمز بـ α إلى نهاية المتتالية (v_n) (لا يطلب حساب α)

ب/ ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

k عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $x\ e^{kx} + = 1 - x\ \ f_k(x)$.

نرمز بـ (C_k) للمنحني الممثل للدالة g_k في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I – نعتبر الدالة g_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x) = 1 + (1+kx)\, e^{kx}$.

1. أدرس $g'_k(x)$ ثم أدرس إشارته.
2. شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x ، $g_k(x) > 0$.

II –1.أ/ بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثيتيها .

ب/ أحسب نهاية الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$.

جـ/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_k) بجوار $-\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ/ عين معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_k) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

ب/ بين أن النقطة $F_k\left(-\frac{2}{k}; -\frac{2}{k}(1+e^{-2}) - 1\right)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_k) .

4. أ/ بين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 \leq \alpha \leq 1$.

ب/ بين أن المسافة بين النقطة $N(\alpha; f_1(\alpha))$ و المستقيم (D) تساوي $\sqrt{2}$ / αe^{α} .

5. أ/ بين أنه من أجل عدد حقيقي ، $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_k) و (C_{-k}) ؟.

ب/ أرسم في نفس المعلم (C_1) و (C_{-1}) .

III– λ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر التكامل التالي: $I_k = \int_\lambda^0 -xe^{kx} dx$.

1. هل العدد I_k يمثل مساحة؟.
2. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_1 ثم $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_1$ ، فسر هذه النتيجة.
3. بين أن : $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_k = \frac{1}{k^2}$

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) $\sqrt{2017} \approx 44,9$

العدد 2017 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2017}$ فإن 2017 عدد أولي . **(0,25)**

2) أ/ $PGCD(22187;10085;14119)=2017$. **(0,25)**

ب/ فعلا محققة تصبح (E) من الشكل: $7x-5y=11$. **(0,25)**

$S=\{(5k+3, 7k+2); k\epsilon\mathbb{Z}\}$. **(0,25)**

ج/ $S=\{(55k'+33, 77k'+44); k'\epsilon\mathbb{Z}\}$. **(0,5)**

3) أ/ $5^{4k+r} \equiv 5^r[11]$ حيث $r\epsilon\{0,1,2,3\}$. **(0,5)**

بواقي قسمة 5^n على 11 هي: 1 ، 5 ، 4 ، 9.

$7^{10k+r} \equiv 7^r[11]$ حيث $r\epsilon\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

بواقي قسمة 7^n على 11 هي: 1 7 5 2 3 10 4 6 9 8 . **(0,5)**

ب/ $n=4k+1 ; k\epsilon\mathbb{N}$ **(0,25)**

4) أ/ محققة **(0,25)**

ب/ 1016 ، 2017 ، 7011 **(0,5)**

ج/ $7011=\overline{52\alpha4}^{11}$ ، $1016=\overline{844}^{11}$ ، $2017=\overline{1574}^{11}$

$\alpha=10$. **(0,5)**

التمرين الثاني:(04 نقاط)

1) $x^2e^{2iy}+4=0$ تكافئ $x^2e^{2iy}=4e^{i\pi}$

$\begin{cases} x^2=4 \\ 2y=\pi+2\pi k \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{\pi}{2}+\pi k \end{cases}$ مع **(0,5)**

ـ التحقق:

$2^2e^{-2i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-4+4=0+4$ **(0,25)**

$=2e^{-i\frac{\pi}{2}}-2i$

2) أ/ $z'-1=\frac{4}{r}\left(\frac{-i}{e^{i\theta}}\right)$ و منه $z'-1=\frac{4}{r}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ **(0,5)**

ب/ $z'\epsilon\mathbb{R}$ يكافئ $Arg(z')=k\pi$ ، $k\epsilon\mathbb{Z}$

$z'\epsilon\mathbb{R}$ يكافئ $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$

مجموعة النقط M هي مستقيم (AB) أي محور التراتيب ما عدا النقطة B **(0,5)**

ج/ $M\epsilon(C)$ معناه $|z+2i|=2$

$M\epsilon(C)$ معناه $z=2e^{i\theta}-2i$ ، $\theta\epsilon\mathbb{R}$

من أ/ $z'-1=2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$z'-1=2e^{i\alpha}$ $\left(\alpha=-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ **(0,5)**

$|z'-1|=2$ معناه $M'K=2$

M' تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها K ذات اللاحقة 1 و طول نصف قطرها 2 **(0,25)**

3) أ/ $R(A)=K$

$z_K-z_I=a(z_A-z_I)$ $z_I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ **(0,25)**

ب/ **(0,5)**

ج/ $R(A)=K$ مع K مركز الدائرة (C')

(C') هي صورة (C) التي مركزها A بـ R **(0,25)**

الرسم : **(0,5)**

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ/ $u_2=\frac{3}{2}$ ، $u_3=\frac{11}{6}$ ، $u_4=\frac{25}{12}$ **(0,75)**

ب/ البرهان بالتراجع **(0,75)**

2) أ/ لدينا :

$k\le x\le k+1$ و منه $\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{k}$

و منه $\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$

و بالتالي: $\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{k}$ **(0,5)**

ب/ لدينا: $\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{k}$

$k=1$: $\frac{1}{2}\le\int_1^2\frac{1}{x}dx\le1$

$k=2$: $\frac{1}{3}\le\int_2^3\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{2}$

$k=n-1$: $\frac{1}{n}\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{n-1}$

بالجمع و حسب علاقة شال للتكامل

$u_n-1\le\int_1^n\frac{1}{x}dx\le u_n-\frac{1}{n}$

$u_n-1\le\ln n\le u_n-\frac{1}{n}$ **(0,5)**

و نبين أن $0\le v_n\le1$

لدينا : $u_n-1\le\ln n\le u_n-\frac{1}{n}$

$-1\le\ln n-u_n\le-\frac{1}{n}$

$0<\frac{1}{n}\le v_n\le1$

أي $0\le v_n\le1$ **(0,5)**

3) أ/ $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ **(0,5)**

ب/ بما أن

$\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{k}$ لأن $\frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$

و عليه $\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\le0$

أي $v_{n+1}-v_n\le0$

(v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$ **(0,5)**

و منه $a = i$ $\alpha = \frac{\pi}{2}$

تابع التمرين الثالث:

4) أ/ (v_n) متناقصة و محددة من الأسفل فإنها متقاربة **(0,5)**

ب/ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n + \ln n) = +\infty$ **(0,5)**

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I.1) $g'_k(x) = k(2+kx)\,e^{kx}$ **(0,25)**

x	$-\infty$	$-\frac{2}{k}$	$+\infty$
$g'_k(x)$	$-$	0	$+$

(0,25)

x	$-\infty$	$-\frac{2}{k}$	$+\infty$
$g'_k(x)$	$-$	0	$+$
$g_k(x)$	1 ↘	$1-e^{-2}$	↗ $+\infty$

(0,5)

حسب جدول تغيرات g_k لدينا:

$g_k(x) \ge 1 - e^{-2} \ge 0$ **(0,25)**

وعليه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g_k(x) \ge 0$.

II.1) أ/ $f_k(0) = 1$

جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطة ثابتة $I(0;1)$ **(0,25)**

ب/ $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty$ **(0,25)**

$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$ **(0,25)**

ج/ $\lim_{x\to-\infty} [f_k(x) - y] = 0$ **(0,25)**

2) لدينا:

$f'_k(x) = 1 + (1+kx)e^{kx}$ **(0,25)**

$f'_k(x) = g_k(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_k(x)$	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

(0,5)

3) أ/ $(\Delta): y = 2x - 1$ **(0,25)**

ب/ $f''_k(x) = g'_k(x)$ **(0,25)**

$f''_k(x)$ ينعدم عند $-\frac{2}{k}$ و يغير إشارته عندها إذن النقطة F_k نقطة انعطاف للمنحني (C_k) **(0,25)**

4) أ/ مبرهنة القيم المتوسطة **(0,25)**

ب/ $d(N;(D)) = \frac{|\alpha-1|}{\sqrt{2}}$

$d(N;(D)) = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}}$ لأن $(\alpha - 1 < 0)$ **(0,25)**

تابع التمرين الرابع:

5) أ/ $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$ محققة.

الإستنتاج:

$M(x; f_k(x)) \in (C_k)$ فإن $M'(-x; f_k(x) - 2)$ من (C_{-k}) **(0,25)**

و منتصف $[MM']$ هي $I(0;-1)$ فإن (C_k) و (C_{-k}) متناظرين بالنسبة إلى I **(0,25)**

ب/رسم (C_1) و (C_{-1}) **(0,25) + (0,25)**

III. 1) من أجل $x \le 0$:

$(x-1) - f_k(x) = -xe^{kx} \ge 0$

إذن $\,_k$ هو مساحة الحيز المحدد بـ (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$ ، $x = \lambda$ و $y = x - 1$ **(0,25)**

2) $I_1 = 1 + \lambda e^{\lambda} - e^{\lambda}$ **(0,25)**

$\lim_{\lambda\to-\infty} I_1 = 1$ **(0,25)**

التفسير:

هذه النهاية تعني أن مساحة الحيز المحدد بـ (C_k) و محور التراتيب و (D) تساوي 1. **(0,25)**

3) باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد:

$I_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\left(\lambda k e^{\lambda k} - e^{\lambda k}\right)$ **(0,25)**

$\lim_{\lambda\to-\infty} I_k = \frac{1}{k^2}$

$f_1(\alpha)=0$ معناه $1-\alpha=\alpha e^{\alpha}$

وعليه : $d(N;(D))=\dfrac{\alpha e^{\alpha}}{\sqrt{2}}$ **(0,25)**